ZAMM · Z. Angew. Math. Mech. **81** (2001) 1, 69–71

Brock, F.

An Isoperimetric Inequality for Eigenvalues of the Stekloff Problem

Let Ω be a bounded smooth domain in $\mathbb{R}^n$ and let $0 = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ denote the eigenvalues of the Stekloff problem: $\Delta u = 0$ in Ω and $(\partial u)/(\partial \nu) = \lambda u$ on $\partial\Omega$. We show that $\sum\limits_{i=2}^{n+1} \lambda_i^{-1} \ge n/\lambda_2^*$, where λ_2^* denotes the second eigenvalue of the Stekloff problem in a ball having the same measure as Ω. The proof is based on a weighted isoperimetric inequality.

Key words: eigenvalue problem, harmonic function, isoperimetric inequality

MSC (2000): 35P15, 26D15

1. This short note is concerned with the eigenvalue problem of Stekloff (see [47]):

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \rho u \quad \text{on } \partial\Omega \qquad (\nu : \text{exterior normal})\,, \tag{2}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with Lipschitz boundary and $\rho \in L^\infty(\partial\Omega)$ is given and nonnegative. Note that (1), (2) describes the stationary heat distribution in a body Ω whose flux through $\partial\Omega$ is proportional to the temperature on $\partial\Omega$. In two dimensions, it can also be interpreted as a membrane with whole mass concentrated on the boundary. The properties (i) and (ii) below are well-known (see e.g. [1], pp. 95–103):

(i) There exist infinitely many eigenvalues $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ and corresponding eigenfunctions $u_1, u_2, \ldots$ of problem (1), (2). In particular, $\lambda_1 = 0$, $u_1 = \text{const} \ne 0$, so that λ_2 is the first nontrivial eigenvalue.

(ii) There holds the following variational characterization:

$$\lambda_i \equiv \lambda_i(\Omega) = \min \left\{ \frac{\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx}{\int\limits_{\partial\Omega} \rho v^2\, dS} : v \in W^{1,2}(\Omega),\ \int\limits_{\partial\Omega} \rho v u_j\, dS = 0 \text{ for } j = 1, \ldots, i-1 \right\}, \qquad i = 2, 3, \ldots\,.$$

Furthermore, an easy calculation shows:

(iii) If $\Omega = B_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ and $\rho \equiv 1$, then λ_2 has multiplicity n with eigenfunctions x_i, $i = 1, \ldots, n$, and $\lambda_2 = 1/R$.

Let $M = \int\limits_{\partial\Omega} \rho\, dS$, the 'total mass' of $\partial\Omega$. Using conformal mapping, Weinstock [7] has proved the following isoperimetric inequality: *For all two-dimensional simply connected domains with analytic boundary of assigned total mass M, the circle yields the maximum value of λ_2,* that is,

$$\lambda_2(\Omega) \le 2\pi/M\,. \tag{3}$$

Later on, Hersch and Payne [3] observed that Weinstock's proof actually gives the sharper isoperimetric result

$$\frac{1}{\lambda_2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda_3(\Omega)} \ge \frac{M}{\pi}\,. \tag{4}$$

2. Our aim is to generalize (4) to arbitrary dimensions. Let $m(\Omega)$ denote the n-dimensional Lebesgue measure of Ω and $\omega_n = m(B_1)$. We prove

Theorem 1: *Let $m(B_R) = m(\Omega)$, and suppose that $\rho > 0$ on $\partial\Omega$. Then*

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i(\Omega)} \ge nR\bar{\rho}\,, \tag{5}$$

where $\bar{\rho}$ is given by

$$\bar{\rho} := \frac{n\omega_n R^{n-1}}{\int\limits_{\partial\Omega} (1/\rho)\, dS}\,. \tag{6}$$

The equality sign in (5) is attained if Ω is a ball and if ρ is constant on $\partial\Omega$.

For the proof we need the following weighted isoperimetric inequality (see [2]):

Lemma 2: *Let Ω and B_R be as in Theorem 1. Furthermore, let $f \in C([0,+\infty))$ be nonnegative, nondecreasing and suppose that*

$$(f(z^{1/n}) - f(0))\, z^{1-(1/n)}\,, \qquad z \ge 0\,, \tag{7}$$

is convex. Then

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(|x|)\, dS \ge \int\limits_{\partial B_R} f(|x|)\, dS = n\omega_n f(R)\, R^{n-1}\,. \tag{8}$$

Note that (7) is satisfied, for instance, if $f(t) = t^p$, $(t \ge 0)$, for some $p \ge 1$.

Proof of Theorem 1: There holds the following characterization for the inverse trace of eigenvalues (see for instance [1], p. 99):

$$\sum_{i=k}^{k+l} \frac{1}{\lambda_i(\Omega)} = \max\left\{ \sum_{i=k}^{k+l} \int\limits_{\partial\Omega} \rho v_i^2\, dS : v_i \in W^{1,2}(\Omega),\ \int\limits_{\Omega} \nabla v_i \nabla v_j\, dx = \delta ij,\ \int\limits_{\Omega} \nabla v_i \nabla u_m\, dx = 0, \right.$$
$$\left. \int\limits_{\partial\Omega} \rho v_i\, dS = 0,\ \text{for } i,j = k,\dots,k+l,\ m = 1,\dots,k-1 \right\}, \qquad k,l \in \mathbb{N},\ k \ge 2\,. \tag{9}$$

Note that (9) follows easily from (ii). Without lost of generality we may assume that

$$\int\limits_{\partial\Omega} \rho x_i\, dS = 0\,, \qquad i = 1,\dots,n\,. \tag{10}$$

Choosing $k = 2$, $l = n-1$, and $v_i(x) = (m(\Omega))^{-1/2}\, x_{i-1}$, $i = 2,\dots,n+1$, in (9), we arrive at

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i(\Omega)} \ge \frac{1}{m(\Omega)} \sum_{i=2}^{n+1} \int\limits_{\partial\Omega} \rho x_i^2\, dS = \frac{1}{m(\Omega)} \int\limits_{\partial\Omega} \rho |x|^2\, dS\,.$$

Using Lemma 1 and Cauchy's inequality, this yields

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i(\Omega)} \ge \frac{1}{m(\Omega)} \frac{\left(\int\limits_{\partial\Omega} |x|\, dS\right)^2}{\int\limits_{\partial\Omega} (1/\rho)\, dS} \ge \frac{n^2\omega_n R^n}{\int\limits_{\partial\Omega} (1/\rho)\, dS} = nR\bar{\rho}\,.$$

Finally, if Ω is a ball and if ρ is constant on $\partial\Omega$, then the classical isoperimetric inequality

$$\int\limits_{\partial\Omega} dS \ge n\omega_n R^{n-1} \tag{11}$$

yields $\rho \equiv \bar{\rho}$, so that we have equality in (5) by (iii). □

If ρ is constant, then a slight modification of the proof of Theorem 1 leads to the following

Theorem 3: *Let Ω and B_R be as in Theorem 1, and let $\rho \equiv 1$. Then*

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i(\Omega)} \ge nR = \frac{n}{\lambda_2(B_R)}\,. \tag{12}$$

Proof: Proceeding as in the proof of Theorem 1, we arrive at

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i(\Omega)} \ge \frac{1}{m(\Omega)} \int\limits_{\partial\Omega} |x|^2\, dS\,,$$

and this yields, using Lemma 1 and (iii),

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i(\Omega)} \ge \frac{1}{m(\Omega)}\, n\omega_n R^{n+1} = nR = \frac{n}{\lambda_2(B_R)}\,.$$

Note that, if $\rho \equiv 1$, then $\bar{\rho} \le 1$ by (11), so that (12) is sharper than (5) in this case. □

3. Next we compare our results with (4).
Let $n = 2$. Then Cauchy's inequality and (11) yield

$$\frac{M}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \rho\, dS \ge \frac{1}{\pi} \frac{\left(\int\limits_{\partial\Omega} dS\right)^2}{\int\limits_{\partial\Omega} (1/\rho)\, dS} = \frac{\bar{\rho}}{2\pi^2 R} \left(\int\limits_{\partial\Omega} dS\right)^2 \ge 2R\bar{\rho}\,.$$

Furthermore, if $\rho \equiv 1$, then we have by (11),

$$\frac{M}{\pi} = \frac{\int\limits_{\partial\Omega} dS}{\pi} \geq 2R\,.$$

Thus, Payne and Hersch's estimate (4) is sharper than our results in the two-dimensional case. This suggests that Theorem 1 and 2 are also not optimal for $n \geq 3$.

4. Let $0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \ldots$ denote the eigenvalues of the Neumann problem

$$-\Delta u = \mu u \quad \text{in } \Omega\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\,. \tag{14}$$

It would be interesting to know wether there holds an inequality analogous to (5), namely

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\mu_i(\Omega)} \geq \frac{n}{\mu_2(B_R)}\,. \tag{15}$$

This is known to be true for $n = 2$ (see [6], p. 634 and [5]). But the proof of this result is based on conformal mapping and cannot be transferred to higher dimensions.

Acknowledgements

I am grateful to G. Berger (Leipzig) for helpful conversations.

References

1 Bandle, C.: Isoperimetric inequalities and applications. Pitman, Boston 1980.
2 Betta, F.; Brock, F.; Mercaldo, A.; Posteraro, M. R.: A weighted isoperimetric inequality and applications to symmetrization. J. Inequ. Appl. (to appear), 20 pp.
3 Hersch, J.; Payne, L. E.: Extremal principles and isoperimetric inequalities for some mixed problems of Stekloff's type. Z. Angew. Math. Phys. **19** (1968), 802–817.
4 Stekloff, M. W.: Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **19** (1902), 455–490.
5 Szegö, G.: Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area. J. Rat. Mech. Anal. **3** (1954), 343–356.
6 Weinberger, H.: An isoperimetric inequality for the n-dimensional free membrane problem. J. Rat. Mech. Anal. **5** (1956), 633–636.
7 Weinstock, R.: Inequalities for a classical eigenvalue problem. J. Rat. Mech. Anal. **3** (1954), 745–753.

Received February 2, 1999, revised August 2, 1999, accepted August 10, 1999

Address: Dr. Friedemann Brock, Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik, Augustusplatz 10, D-04109 Leipzig, Germany, e-mail: brock@mi.uni-koeln.de

BOOK REVIEW

Meskouris, K.; Hake, E.: Statistik der Stabtragwerke. Einführung in die Tragwerkstheorie. Berlin et al., Springer-Verlag 1999. XV, 294 pp. DM 59,00, öS 431.00, sFr 54.00, £ 22.50, $ 33.75; ISBN 3-540-66136-0 (Springer-Lehrbuch)

Auch wenn bei der Auslegung von Bauwerken in zunehmendem Maße Computerprogramme eingesetzt werden, ist doch für alle Tragwerksplaner eine ausreichende Kenntnis der klassischen Stabstatik von fundamentaler Bedeutung. Vor allem, wenn es darum geht, ein eigenes Gefühl für das Tragverhalten von Bauwerken zu entwickeln oder Computerergebnisse zu überprüfen, ist die Beherrschung der Grundlagen und die Fähigkeit, Berechnungen auch manuell durchführen zu können, unerlässlich.

Das vorliegende Lehrbuch beschreibt in übersichtlicher Weise die wichtigsten Zusammenhänge der Stabstatik sowie die bedeutendsten klassischen Lösungsverfahren.

Aufbauend auf die Grundlagen der Mechanik werden zunächst die wesentlichen Größen in der Statik erläutert und wichtige Definitionen zusammengestellt. Es folgen einige Ausführungen zum Aufbau von Stabtragwerken und die Einführung der gängigsten Methoden zur Ermittlung von Kraftgrößen.

Mit Hilfe dieser allgemeinen Zusammenhänge wird das Tragverhalten verschiedener *statisch bestimmter* Stabwerke, einschließlich Fachwerke, diskutiert und für repräsentative Beispiele vor allem die Ermittlung von Schnittgrößen ausführlich behandelt. Es folgt die Darstellung von Verfahren zur Berechnung der Verformung an einzelnen Tragwerkspunkten sowie der Biegelinie. Die Ausführungen werden durch vereinzelt abgedruckte Tabellen ergänzt, die für den Leser auch bei der Lösung eigener Aufgabenstellungen hilfreich sind. Mit der Berechnung von Einflusslinien wird die Betrachtung statisch bestimmter Systeme abgeschlossen.

Im letzten Drittel des Buches widmen sich die Autoren der Berechnung *statisch unbestimmter* Stabwerke. Es werden das Kraftgrößen- und das Drehwinkelverfahren eingehend behandelt und deren Einsatz anhand von Zahlenbeispielen erläutert.

Einige Hilfstafeln im Anhang runden den Inhalt dieses Lehrbuches ab.

Das Buch ist als Einführung in die komplexen Zusammenhänge der Stabstatik zu sehen. Es ist vor allem Studierenden als Begleitbuch zur Statik-Vorlesung und zur Prüfungsvorbereitung sehr zu empfehlen, da es die wichtigsten Berechnungsverfahren und Vorgehensweisen enthält und diese anhand von zahlreichen Beispielen erläutert. Auch für den in der Praxis tätigen Ingenieur kann das Buch sehr hilfreich sein, wenn es darum geht, einzelne Gebiete der Tragwerkslehre aufzufrischen.

Hamburg O. v. Estorff